Appendice A

Richiami di algebra lineare

A.1 Matrici

Una matrice è un'insieme di numeri reali ordinati per righe e per colonne. Le matrici vengono generalmente indicate con le lettere maiuscole. Ciascun elemento della matrice è indicato con una minuscola accompagnata dal numero della riga e dal numero della colonna in cui esso si trova. Ad esempio, a_{ij} è l'elemento situato all'incrocio della i-esima riga e j-esima colonna. Ad esempio, se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_{14} = 8$, $a_{22} = 1$, $a_{32} = 5$, ecc.. Per maggiore chiarezza di esposizione a volte come pedice riportiamo il numero di righe e di colonne della matrice. Ad esempio, sarebbe stato equivalente scrivere $A_{3\times4}$.

Il vettore riga non è altro che una matrice di dimensione $1 \times n$, cioè una matrice i cui elementi sono disposti su una sola riga. Il vettore colonna, al contrario, è una matrice di dimensione $n \times 1$, cioè una matrice i cui elementi sono disposti su una sola colonna. Tutte le volte che si parla genericamente di un vettore ci si riferisce sempre al vettore colonna.

Se in una matrice il numero di righe ed il numero delle colonne sono uguali essa è detta matrice quadrata. L'ordine di una matrice quadrata può essere indicato con un solo numero. Ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

sono rispettivamente di ordine 2 e 3. Data una matrice quadrata A di ordine m, la diagonale principale di A è l'insieme degli elementi a_{ij} per i quali $i = j$. Ad esempio, nella matrice C, introdotta nell'equazione (A.1), gli elementi sulla diagonale principale sono costituiti da 1, 1 e 6. Tipi particolari di matrici quadrate sono le seguenti:

- *matrice simmetrica:* in cui $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i e $j = 1, 2, \ldots$. Cioè, gli elementi della prima riga sono uguali ai corrispondenti elementi della prima colonna, gli elementi della seconda riga sono uguali ai corrispondenti elementi della seconda colonna e così via per ogni riga e colonna della matrice.

- *matrice diagonale:* dove $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Da questa definizione segue immediatamente che in questa matrice gli elementi che non si trovano sulla diagonale principale sono tutti uguali a 0. Esempi di matrici diagonali sono i seguenti:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Talvolta, le matrici diagonali sono indicate con il simbolo $diag(a_{11}, \dots, a_{mm})$. Ad esempio, le matrice D ed E potevano essere indicate rispettivamente con $D = diag(1, 4)$ e $E = diag(3, 8, 6)$.

A.2 Operazioni con le matrici

L'obiettivo di questa sezione è quello di illustrare le operazioni di base che si possono effettuare con le matrici.

Matrice trasposta: l'operazione di trasposizione consiste nel sostituire alle righe di una matrice le sue colonne e viceversa. L'operazione di trasposizione si indica con un apice ($'$). Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

oppure se

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

In Excel l'operazione di trasposizione viene effettuata utilizzando la funzione *MATR.TRASPOSTA*. Chiaramente, se l'operazione di trasposizione viene applicata due volte, il risultato è la matrice originale. In simboli

$$(A')' = A.$$

Se la matrice trasposta è uguale alla matrice originaria ($A = A'$), allora la matrice è simmetrica.

Somma di matrici e di vettori: se due matrici (vettori) presentano la stessa dimensione la loro somma si effettua aggiungendo i rispettivi elementi. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 17 & -9 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicazione di matrici e di vettori. Affinché il prodotto di due matrici A e B sia definito, è necessario che il numero di colonne della matrice A (matrice premoltiplicante) sia uguale al numero di righe della matrice B (matrice postmoltiplicante).

Se questa condizione è verificata, le matrici si dicono conformabili. L'elemento che si trova all'incrocio della riga i-esima e della colonna j-esima della matrice $C = A \times B$ è dato da:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

In altri termini, c_{ij} è la somma dei prodotti della riga i-esima di A e della colonna j-esima di B. Nella moltiplicazione matriciale, quindi, moltiplichiamo ogni riga di A per ogni colonna di B. La dimensione della matrice prodotto $C = AB$ avrà un numero di righe uguale a quello della matrice A ed un numero di colonne uguale a quello della matrice B. Quindi, se $A_{n\times m}$, $B_{m\times p}$, allora $AB = C_{n\times p}$. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 3 = 13 & 2\cdot 4 + 1\cdot 6 + 3\cdot 8 = 38 \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 2 + 5\cdot 3 = 31 & 92 \\ 20 & 64 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 = 13 & 1\cdot 4 + 3\cdot 6 + 2\cdot 8 = 38 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 38 \\ 31 & 92 \\ 20 & 64 \\ 13 & 38 \end{pmatrix}.$$

Si noti che A aveva dimensione 4×3, B aveva dimensione 3×2. La matrice prodotto C presenta dimensione 4×2. In questo caso quindi, la matrice C presenta una dimensione diversa da quelle di A e B. È facile controllare che il prodotto matriciale gode della proprietà distributiva sull'addizione e sulla sottrazione:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ A(B-C) &= AB - AC \\ (A+B)C &= AC + BC \\ (A-B)C &= AC - BC. \end{aligned}$$

Utilizzando la legge distributiva, possiamo espandere prodotti del tipo

$$(A-B)(C-D)$$

come

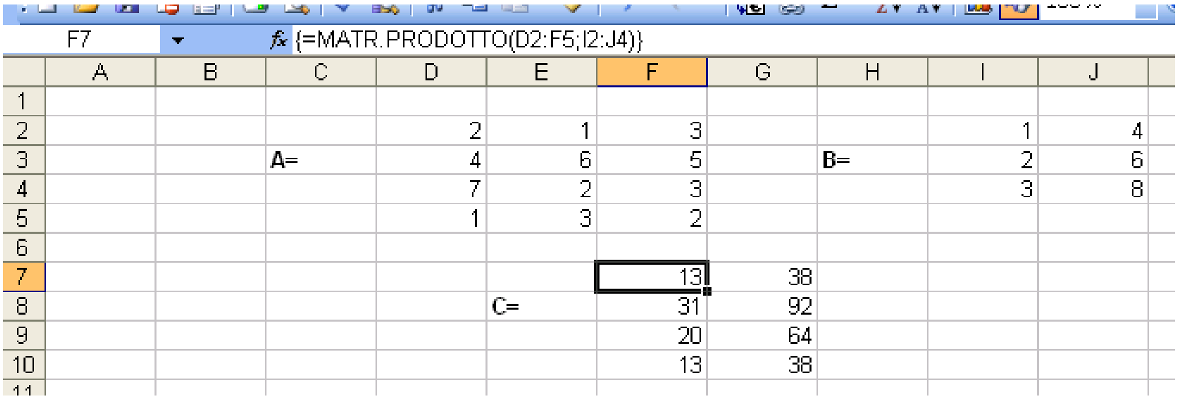
$$\begin{aligned} (A-B)(C-D) &= (A-B)C - (A-B)D \\ &= AC - BC - AD + BD. \end{aligned}$$

L'ultima cosa da segnalare sul prodotto di matrici è che la trasposta di un prodotto è uguale al prodotto delle trasposte cambiate di ordine.

$$(AB)' = B'A'.$$

In Excel il prodotto di due matrici può essere ottenuto tramite la funzione *MATR.PRODOTTO* (v. Figura A.1).

Figura A.1: *Calcolo del prodotto tra due matrici utilizzando la funzione di Excel* MATR.PRODOTTO.



A.3 Il determinante e la matrice inversa

Preliminarmente allo sviluppo del determinante e della matrice inversa occorre introdurre una particolare matrice quadrata nota con il nome di *Matrice identità*. Essa non è altro che una matrice diagonale in cui gli elementi sulla diagonale principale sono tutti uguali ad 1, in simboli: $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$. Esempi di matrici identità sono i seguenti:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identità viene indicata con il simbolo I. Essa può essere indicata con il simbolo I_m anziché con I in modo da specificarne in maniera compatta l'ordine. La matrice identità, svolge nell'algebra lineare, una funzione analoga a quella svolta dal numero 1 nell'algebra tradizionale. Ad esempio, è facile controllare che

$$DI_2 = I_2D = D \qquad \text{oppure} \qquad EI_3 = I_3E = E,$$

dove D e E sono le matrici definite nell'equazione (A.2). In generale, data una matrice quadrata A di ordine m, esiste sempre una matrice I_m tale per cui

$$AI_m = I_mA = A.$$

Determinante. Data una matrice A quadrata di ordine m, il determinante (indicato con $det(A)$ oppure con $|A|$) è uno scalare che si ottiene come funzione di tutti gli elementi di A. Più precisamente, data una matrice A quadrata di ordine m, si considerano tutti i gruppi di m elementi che si possono formare con gli m^2 elementi della matrice A, mettendo in ciascun gruppo un solo elemento per ciascuna delle m righe e per ognuna delle m colonne. Ad esempio, con $m = 3$, data

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

avremo:

$$a_{11}a_{22}a_{33}; \qquad a_{11}a_{32}a_{23}; \qquad a_{12}a_{21}a_{33};$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}; \qquad a_{13}a_{21}a_{32}; \qquad a_{13}a_{22}a_{31}.$$

In generale, il numero di gruppi che si possono formare nel modo suddetto da una matrice quadrata di ordine m è dato dalle permutazioni di m elementi: $m! = m(m-1)(m-2)\cdots 1$. Il passo successivo consiste nell'attribuire un segno ai gruppi di elementi così formati. Per fare questo, disponiamo gli elementi all'interno di ciascun gruppo secondo l'ordine crescente del primo deponente:

$$a_{11}a_{22}a_{33}; \qquad a_{11}a_{23}a_{32}; \qquad a_{12}a_{21}a_{33};$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}; \qquad a_{13}a_{21}a_{32}; \qquad a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Contiamo per ciascun gruppo le inversioni che si verificano nell'ordine crescente del secondo deponente, contiamo cioè quante volte il secondo deponente di un elemento è maggiore del secondo deponente di uno degli elementi che lo seguono in uno stesso gruppo. Ad esempio, con i sei gruppi formati dalla matrice A, avremo il seguente risultato: nessuna inversione per il primo gruppo, una per il secondo, e 1, 2, 2, 3, rispettivamente, per i rimanenti. Attribuiamo segno $+$ a quei gruppi che hanno un numero pari di inversioni ed un segno $-$ a quei gruppi che hanno un numero dispari di inversioni:

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ &+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

La somma algebrica dei prodotti degli elementi contenuti in ciascun gruppo è il valore del determinante. Ad esempio, date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

avremo:

$$\begin{aligned} |A| &= 6 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 1. \\ |B| &= 10 \cdot 2 \cdot 9 - 10 \cdot 1 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 9 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 180 - 60 - 27 + 1 + 18 - 2 = 110. \\ |C| &= 1 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 225 - 225 = 0. \end{aligned}$$

Una matrice il cui determinante è pari a 0 si dice singolare.

Le proprietà del determinante sono le seguenti:

- il determinante di A è uguale al determinante di A', cioè: $|A| = |A'|$;

- se tutti gli elementi di A di ordine n sono moltiplicati per una costante c il determinante di A risulta moltiplicato per c^n. Se gli elementi di una riga o di una colonna di A sono moltiplicati per una costante c, il determinante di A risulta moltiplicato per c;

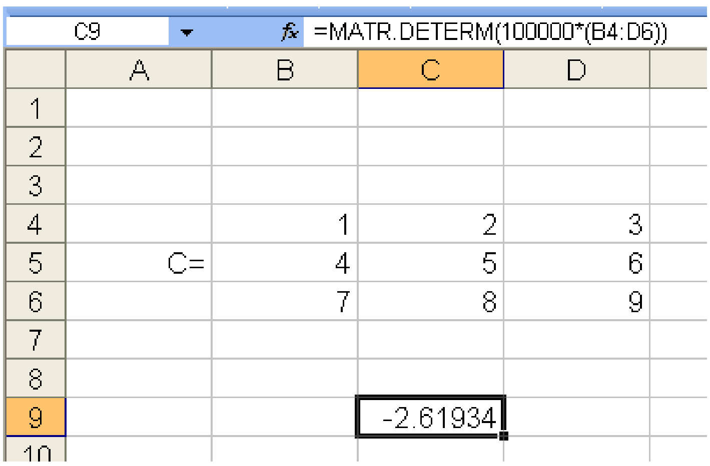
- se una matrice ha una riga (colonna) con tutti gli elementi uguali a zero il determinante di A è uguale a 0;

- date due matrici quadrate A e B di ordine m, si ha che:

$$|A||B| = |AB|.$$

Dato che i calcoli necessari per trovare il determinante sono abbastanza considerevoli, in pratica si ricorre sempre al calcolatore. In Excel la funzione che calcola il determinante si chiama *MATR.DETERM*. Dato che Excel, come tutti gli altri *software*, lavora con un numero di cifre decimali finito, difficilmente otteniamo un valore pari a 0 per il determinante di matrici singolari. Ad esempio, la funzione *MATR.DETERM* applicata alla matrice C definita nell'equazione (A.3) produce come risultato $6.66134E - 16$. Questo significa che Excel lavora con un numero di cifre decimali vicino a 15. Una matrice il cui determinante è vicino a 0, viene detta quasi singolare. Nel caso di una matrice derivante da dati osservazionali, anche quando una matrice è quasi singolare, solo raramente otteniamo un determinante prossimo a zero. Ad esempio, in Excel se proviamo a calcolare il determinante della matrice $100000 \times C$ otteniamo come risultato -2.61934 (v. Figura A.2).

Figura A.2: *Calcolo del determinante.*



In pratica, la strategia utilizzata per verificare se una matrice è quasi singolare è quella di normalizzare preliminarmente la matrice dividendo, ad esempio, ogni riga (ogni colonna) per il massimo valore che si trova su quella riga (colonna). Se il numero di zeri che figurano nel determinante prima della prima cifra significativa è maggiore o uguale o si avvicina molto al numero di cifre significative con cui lavora l'elaboratore, la matrice sarà quasi singolare.

Concludiamo questa trattazione sul calcolo del determinante, ricordando che esso trova molteplici applicazioni in geometria per il calcolo dei volumi, in algebra lineare nel calcolo della matrice inversa e per verificare la dipendenza lineare di un insieme di vettori.

Matrice inversa. Finora abbiamo visto alcune operazioni definite per vettori e matrici (somma, sottrazione e prodotto) che corrispondono ad altrettante operazioni definite per valori scalari. Non abbiamo parlato però di quell'operazione su matrici che corrisponde alla divisione nell'algebra elementare; $c(1/c) = 1$ dove c è un numero reale diverso da 0. Data una matrice A di ordine $n \times n$, il problema è quello di trovare una matrice, che indicheremo con A^{-1} che è detta "matrice inversa di A", tale per cui

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

L'inversione di una matrice, come il calcolo del suo determinante, è un'operazione molto laboriosa anche per matrici di dimensioni ridotte, per cui si deve ricorrere al calcolatore. L'espressione esplicita del calcolo dell'inversa è una funzione che ha il determinante della matrice stessa al denominatore. Questo significa che una matrice ammette l'inversa se e solo il suo determinante è diverso da 0. In Excel la funzione che consente di calcolare l'inversa è nota con il nome di *MATR.INVERSA*. Ad esempio, se A è definita come segue:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

utilizzando la funzione di Excel *MATR.INVERSA* si ottiene (v. Figura A.3)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & -0.25 & -0.75 \\ 0.50 & -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

È immediato controllare che

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Le proprietà dell'inversa sono le seguenti:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \qquad (A')^{-1} = (A^{-1})'; \qquad |A^{-1}| = 1/|A|.$$

Inoltre, se esiste una matrice A^{-1} tale per cui $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ allora essa è unica.

Il calcolo dell'inversa trova molteplici applicazioni in statistica. Di seguito vediamo un esempio di applicazione dell'inversa per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari.

ESEMPIO. Si calcoli la soluzione del seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

SOLUZIONE. Il sistema può essere scritto in forma matriciale come segue:

$$Ax = b \tag{A.4}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

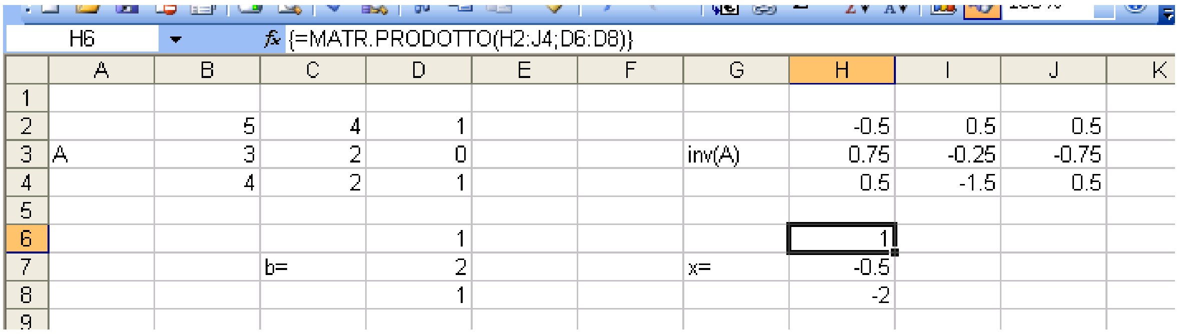
Prendendo l'inversa di ambo i membri dell'equazione (A.4) otteniamo che:

$$x = A^{-1}b.$$

Il determinante della matrice A (calcolato con la funzione di Excel *MATR.DETERM*) risulta pari a -4, quindi l'inversa di A esiste. Moltiplicando l'inversa, ottenuta tramite la funzione *MATR.INVERSA* (zona H2:J4 della Figura A.3) per il vettore dei coefficienti tramite la funzione di Excel *MATR.PRODOTTO* otteniamo che:

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & -0.25 & -0.75 \\ 0.5 & -1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Figura A.3: *Esempio di risoluzione di un sistema lineare. La matrice dei coefficienti è contenuta nella zona B2:D4, la sua inversa nella zona H2:J4. La matrice dei termini noti è contenuta nella zona D6:D8. La zona H6:H8 contiene la soluzione del sistema.*


H6 {=MATR.PRODOTTO(H2:J4;D6:D8)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		5	4	1				-0.5	0.5	0.5	
3	A	3	2	0			inv(A)	0.75	-0.25	-0.75	
4		4	2	1				0.5	-1.5	0.5	
5											
6				1				1			
7			b=	2			x=	-0.5			
8				1				-2			
9											

A.4 Matrici idempotenti e ortogonali

Matrice idempotente. Una matrice quadrata A si dice idempotente se $AA = A$. Ad esempio, data una qualsiasi matrice X di dimensione $n \times k$ tale per cui l'inversa di $X'X$ esiste, allora la matrice $H = X(X'X)^{-1}X'$ è idempotente in quanto:

$$HH = X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X'.$$

Matrice ortogonale. Una matrice quadrata V di ordine n si dice ortogonale se la sua trasposta è uguale alla sua inversa ($V' = V^{-1}$). Ciò implica che $VV' = V'V = I_n$. Ad esempio, la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

è ortogonale, poiché:

$$V'V = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + \frac{5}{9} & -\frac{2\sqrt{5}}{9} + \frac{2\sqrt{5}}{9} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{9} + \frac{2\sqrt{5}}{9} & \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A.5 Vettori linearmente indipendenti e rango di una matrice

Dati k vettori $x_1, \ldots, x_k$, ciascuno dei quali aventi n elementi, il vettore $y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k$, dove $c_1, \ldots, c_k$ sono numeri reali, è una combinazione lineare dei vettori $x_1, \ldots, x_k$. Tali vettori si dicono linearmente indipendenti quando ogni possibile combinazione lineare è diversa dal vettore nullo[a], fatta eccezione per il caso banale in cui $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. In modo equivalente si può dire che i vettori $x_1, \ldots, x_k$ sono linearmente indipendenti se

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k = 0 \qquad \text{implica che} \qquad c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Ad esempio, i vettori bidimensionali $x_1 = (1\ 0)'$ e $x_2 = (0\ 1)'$ sono linearmente indipendenti infatti:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{implica} \qquad c_1 = c_2 = 0.$$

I vettori bidimensionali $x_1 = (1\ 2)'$ e $x_2 = (2\ 4)'$ sono linearmente dipendenti infatti:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{se (ad esempio)} \qquad c_1 = -2c_2 = 1.$$

Si noti, infatti, che gli elementi del vettore x_2 sono il doppio dei corrispondenti elementi del vettore x_1.

Data una matrice di ordine $m \times n$ il rango di riga (colonna) di A è definito come il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti. Se tutte le righe (colonne) di A sono linearmente indipendenti, allora si dice che la matrice A ha rango massimo o pieno. Si può dimostrare che il rango di colonna ed il rango di riga di ogni matrice A di ordine $m \times n$ coincidono. In una matrice di dimensione $m \times n$ il rango massimo è pari al minimo tra m ed n. È lecito, quindi, parlare semplicemente di rango di A.

Una matrice A quadrata di ordine $n \times n$ ammette l'inversa se e solo se ha rango massimo. Se A è una matrice $n \times n$ il cui determinante è nullo ($|A| = 0$), allora il rango di A è minore di n. In tal caso, si dice che la matrice è singolare.

A.6 Autovalori e autovettori

Si consideri una matrice quadrata A di ordine $n \times n$ e uno scalare λ caratterizzato dalla seguente proprietà: dato un vettore x di n elementi, il vettore Ax uguaglia il multiplo λ di x: cioè $Ax = \lambda x$. Naturalmente ciò è vero per ogni valore assegnato di λ nel caso banale $x = 0$. È necessario, quindi, imporre la condizione $x \neq 0$. Inoltre, dato che l'uguaglianza $A(cx) = \lambda(cx)$ è soddisfatta per ogni valore di c, a condizione che anche l'equazione $Ax = \lambda x$ sia soddisfatta, il vettore x ha un grado moltiplicativo di libertà,

[a]Si definisce vettore nullo un vettore i cui elementi sono tutti uguali a zero.

che può essere usato per imporre al vettore della relazione precedente il vincolo del modulo unitario: $x'x = 1$.

L'equazione $Ax = \lambda x$ può essere scritta nella forma equivalente $(A - \lambda I)x = 0$. Con il vincolo sul vettore x possiamo scrivere

$$(A - \lambda I_n)x = 0, \qquad x'x = 1.$$

Ciò significa che le colonne della matrice $A - \lambda I_n$ sono linearmente dipendenti per cui il determinante di questa matrice deve essere 0:

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{A.5}$$

L'equazione (A.5) è chiamata *equazione caratteristica* della matrice A. Lo scalare λ viene chiamato autovalore (o radice caratteristica) di A e x autovettore di A corrispondente alla radice λ. Se A è una matrice di ordine 2×2, l'equazione caratteristica diventa

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Svolgendo il determinante abbiamo

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Questa è una equazione di secondo grado le cui soluzioni sono:

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}.$$

Più generalmente, quando A è di ordine $n \times n$, la sua equazione caratteristica (A.5) diventa un polinomio di grado n-esimo nella variabile λ che, quindi, ammette n soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reali o immaginarie a cui corrispondono n autovettori $x_1, \dots, x_n$. Anche nel caso in cui la matrice A sia costituita da elementi reali, gli autovalori non sono necessariamente reali. Tuttavia, si può dimostrare che se la matrice A è simmetrica le radici caratteristiche sono sempre reali ed il numero di autovalori non nulli coincide con il rango di A.

Per chiarire meglio le idee vediamo ora un esempio pratico del calcolo di autovalori ed autovettori. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

mostreremo ora come trovare gli autovalori e gli autovettori di A. L'equazione caratteristica è la seguente:

$$|A - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0.$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ otteniamo che: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$. Sostituendo il valore $\lambda_1 = 4$ nell'equazione caratteristica otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo otteniamo che $v_{11} = v_{21}$. Tenendo presente il vincolo di normalizzazione per gli autovettori ($v'v = 1$), si ottiene facilmente che il primo autovettore è dato da $v_1 = \left(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\right)'$.

Sostituendo la seconda radice caratteristica $\lambda_2 = 1$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$v_{12} + 2v_{22} = 0.$$

Dopo aver normalizzato, si ottiene che il secondo autovettore sarà uguale a:

$$v_2 = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}} \quad \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)'.$$

Un'interessante proprietà legata alle radici caratteristiche è la seguente: gli autovalori del quadrato di A (ossia della matrice $A \times A$) sono uguali ai quadrati degli autovalori di A e gli autovettori del quadrato di A sono uguali a quelli di A. Si osservi infatti che se:

$$Ax = \lambda x$$

abbiamo che:

$$A^2 x = \lambda A x = \lambda^2 x.$$

Ne consegue immediatamente che se è A è idempotente (ossia se $AA = A$) i suoi autovalori sono uguali a 0 oppure ad 1. Si noti infatti che se $AA = A$ si ottiene

$$A^2 x = \lambda^2 x = Ax = \lambda x.$$

ossia $\lambda = \lambda^2$. Gli unici 2 numeri che non cambiano se vengono elevati al quadrato sono 0 e 1.

A.7 Forme quadratiche

Si definisce forma quadratica una matrice quadrata di dimensioni $n \times n$ postmoltiplicata per un vettore colonna e premoltiplicata per la trasposta del medesimo vettore:

$$x'Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Senza perdita di generalità, si può assumere che la matrice di una forma quadratica sia simmetrica, dato che il suo valore resta immutato qualora si sostituisca la matrice A con la matrice simmetrica $(1/2)(A + A')$:

$$\frac{1}{2} x'(A + A')x = \frac{1}{2} x'Ax + \frac{1}{2} x'A'x = \frac{1}{2} x'Ax + \frac{1}{2} x'Ax = x'Ax.$$

Ad esempio, è esattamente uguale scrivere:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3.5 \\ 3.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

L'utilità di riscrivere le forme quadratiche tramite matrici simmetriche è, ad esempio, dovuto al fatto che gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti reali.

Naturalmente, se $A = I_n$, $x'Ax = x'x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Se invece A è una matrice diagonale, la forma quadratica non è altro che la somma dei quadrati ponderati degli elementi del vettore x:

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

Proprietà: Una forma quadratica $x'Ax$ si dice idempotente se la matrice A è idempotente.

Definizione: la matrice A della forma quadratica $x'Ax$ viene detta definita positiva se $x'Ax > 0$ per qualsiasi vettore $x \neq 0$. La matrice A viene detta definita non negativa (o semidefinita positiva) se $x'Ax \geq 0$ per qualsiasi vettore $x \neq 0$.

Si può dimostrare che se una matrice è definita positiva i suoi autovalori sono tutti maggiori di zero, il suo determinante è maggiore di zero e, quindi, essa è non singolare. Se invece una matrice è definita non negativa tutti i suoi autovalori sono maggiori o uguali a zero.

Le forme quadratiche idempotenti sono un esempio di forme quadratiche definite non negative in quanto gli autovalori della matrice idempotente sono tutti maggiori o uguali a zero.

Un esempio di forma quadratica idempotente è lo stimatore devianza totale (v. sezione 4.7).

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2.$$

È facile verificare che $(n-1)s^2$ può essere riscritto come segue:

$$(n-1)s^2 = y'Ay,$$

dove $y = (y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_n)'$ è il vettore delle osservazioni, A è una matrice di dimensione $n \times n$ uguale a

$$A = I_n - ii'/n.$$

Con il simbolo i abbiamo indicato un vettore di dimensione $n \times 1$ composto da elementi tutti uguali ad 1[b]. Dato che $\frac{1}{n}i'y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$ si può scrivere che

$$Ay = y - i\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \dots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}.$$

In altri termini, premoltiplicando per A il vettore colonna delle osservazioni si ottiene un nuovo vettore dove le osservazioni sono scritte in forma di scarti dalla media. È facile verificare che la matrice A è simmetrica e idempotente, quindi la somma degli scarti al quadrato (devianza totale) può essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = y'A'Ay = y'AAy = y'Ay.$$

Nella regressione incontriamo spesso somme di quadrati che possono essere riscritte come forme quadratiche idempotenti.

A.8 Scomposizione spettrale di una matrice simmetrica

Ogni matrice simmetrica A $n \times n$ può essere scomposta come segue:

$$A = V\Lambda V',$$

dove $V = (v_1, \dots, v_n)$ è la matrice ortogonale ($V'V = I_n$) che contiene gli autovettori di A e $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ è una matrice diagonale che contiene, sulla diagonale principale, gli autovalori di A.

[b]Ad esempio, se $n = 4$ abbiamo che:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.25 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.75 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dimostrazione: dalla definizione di autovalori e autovettori, si può scrivere che:

$$\begin{aligned} AV &= (\lambda_1 v_1 \;\; \lambda_2 v_2 \;\; \ldots \;\; \lambda_n v_n) \\ &= (v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= V\Lambda. \end{aligned}$$

Se entrambi i membri vengono postmoltiplicati per la matrice V' ricordando che $V'V = VV' = I$, il risultato è immediato.

Vediamo ora un esempio di scomposizione spettrale della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{20}}{3} \\ \frac{\sqrt{20}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica: $\lambda_i^2 - \lambda_i - 2 = 0$, otteniamo che $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. I corrispondenti autovettori normalizzati sono riportati nella matrice che segue

$$V = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

La scomposizione in valori singolari è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{20}}{3} \\ \frac{\sqrt{20}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Se la matrice A è definita positiva tutti i suoi autovalori sono maggiori di zero. Sotto queste condizioni, la matrice Λ si può scrivere come: $\Lambda = \Lambda^{1/2}\,\Lambda^{1/2}$, dove

$$\Lambda^{1/2} = diag\left(\sqrt{\lambda}_1 \; \sqrt{\lambda}_2 \; \cdots \; \sqrt{\lambda}_n\right).$$

La matrice A può essere scritta come:

$$A = V\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}V' = PP',$$

dove $P = V\Lambda^{1/2}$ è non singolare in quanto è il prodotto di due matrici non singolari. In altri termini, se A è una matrice simmetrica e definita positiva, si può individuare una matrice non singolare P tale che: $A = PP'$. Utilizzeremo questo risultato nella sezione A.15 per capire come si distribuiscono le forme quadratiche di variabili aleatorie.

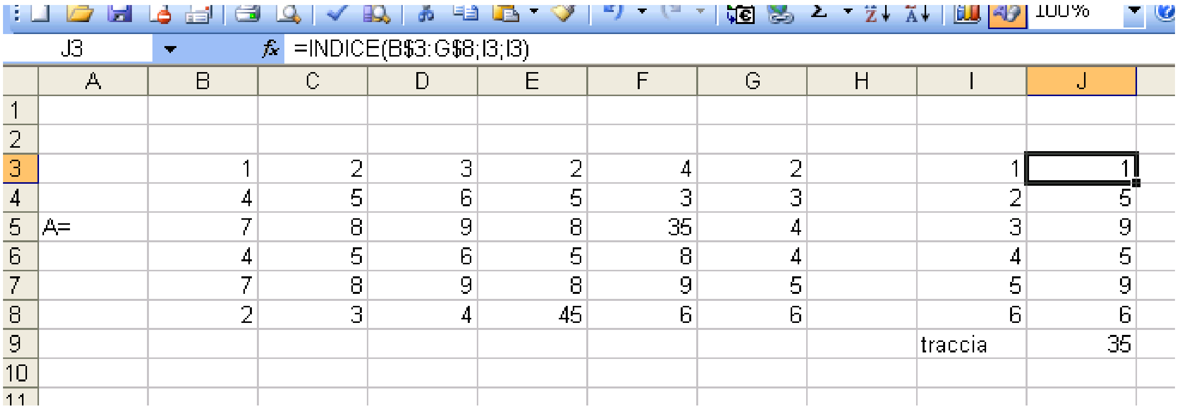
A.9 Traccia e sue proprietà

La traccia di una matrice A di dimensione $n \times n$ è definita come la somma dei suoi elementi sulla diagonale principale:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

In Excel, per calcolare la traccia di una matrice dobbiamo prima estrarre gli elementi che si trovano sulla diagonale principale tramite la funzione *INDICE*. Se supponiamo, ad esempio, che la matrice di cui vogliamo calcolare la traccia si trovi nella zona B3:G8, la funzione *INDICE(B3:G8,1,1)* estrae l'elemento che si trova nella cella B3 (prima riga e prima colonna della zona B3:G8), la funzione *INDICE(B3:G8,2,2)* estrae l'elemento che si trova nella cella C4 (seconda riga e seconda colonna della zona B3:G8), la funzione *INDICE(B3:G8,2,4)* estrae l'elemento che si trova nella cella E4 (seconda riga e quarta colonna della zona B3:G8) .... Il trucco consiste allora nel costruire una sequenza di lunghezza pari all'ordine della matrice di cui si desidera calcolare la traccia, con valore iniziale 1 e passo 1. Se supponiamo che la sequenza sia stata creata nella zona I3:I8, per estrarre gli elementi della diagonale principale, è sufficiente inserire la formula *INDICE(B$3:G$8;I3;I3)* e poi trascinare in basso (v. Figura A.4). La traccia non è altro che la somma di questi elementi (in questo esempio $tr(A) = 35$).

Figura A.4: *Esempio di calcolo della traccia di una matrice. Nella zona J3:J8 attraverso la funzione* INDICE*, sono stati estratti i valori che si trovano sulla diagonale principale della matrice A. La cella J9 contiene la somma degli elementi della zona J3:J8.*



J3 =INDICE(B$3:G$8;I3;I3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3		1	2	3	2	4	2		1	1
4		4	5	6	5	3	3		2	5
5	A=	7	8	9	8	35	4		3	9
6		4	5	6	5	8	4		4	5
7		7	8	9	8	9	5		5	9
8		2	3	4	45	6	6		6	6
9									traccia	35
10										

Le proprietà della traccia sono le seguenti:

- la traccia di uno scalare k è pari allo scalare stesso $tr(k) = k$;

- la traccia del prodotto scalare kA è pari a k volte la traccia, cioè: $tr(kA) = ktr(A)$;

- la traccia della somma di due matrici è uguale alla somma delle singole tracce, cioè: $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ dove A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine;

- le tracce delle matrici prodotto AB e BA sono uguali: $tr(AB) = tr(BA)$ (A e B sono di ordine tale che entrambe le matrici prodotto esistono). Si verifica facilmente, infatti, che entrambe le tracce sono uguali a

$$\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji},$$

dove la sommatoria della i va da 1 al numero di righe della matrice A (= numero di colonne della matrice B) e la sommatoria della j va da 1 al numero delle colonne della matrice A (= numero di righe della matrice B);

- il valore atteso (v. sezione A.13) della traccia di A è uguale alla traccia del valore atteso di A. In simboli: $tr(E(A)) = E(tr(A))$. Questa proprietà discende immediatamente dal fatto che la traccia è un operatore lineare.

Se A è simmetrica di ordine $n \times n$, applicando la scomposizione in valori singolari possiamo scrivere che:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A) = tr(V\Lambda V') = tr(\Lambda V'V) = tr(\Lambda I_n) = tr(\Lambda). \tag{A.6}$$

La traccia di una matrice simmetrica, quindi, coincide con la somma dei suoi autovalori. Questo risultato, in realtà, è valido per qualsiasi matrice quadrata, anche non simmetrica.

A.10 Rango e traccia di matrici idempotenti

L'obiettivo di questa sezione è stabilire quale relazione intercorre tra il rango e la traccia di una matrice idempotente.

Finora abbiamo visto che il numero di autovalori non nulli in una matrice simmetrica è uguale al suo rango e che gli autovalori di una matrice idempotente sono pari a 0 oppure ad 1 (v. sezione A.6). Concludiamo, quindi, che il rango di una matrice idempotente è pari alla somma dei suoi autovalori. Dato che la somma degli autovalori di una matrice coincide con la sua traccia (v. equazione A.6), concludiamo che *il rango e la traccia di una matrice idempotente coincidono.*

Questo risultato è importante per determinare la distribuzione delle forme quadratiche idempotenti (v. sottosezione A.16).

A.11 Differenziazione matriciale

L'obiettivo di questa sezione è trovare le espressioni esplicite delle derivate parziali di vettori e matrici. Si consideri la seguente funzione del vettore x di n elementi

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Assumendone l'esistenza, si possono rappresentare le n derivate parziali di primo ordine della precedente funzione come elementi di un vettore colonna di n elementi, $\partial f/\partial x$, noto con il nome di gradiente della funzione f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Si consideri ora la funzione lineare $a'x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La sua derivata rispetto a x_i è a_i; il gradiente quindi è:

$$\frac{\partial a'x}{\partial x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a.$$

In generale quindi,

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = A'. \tag{A.7}$$

Si consideri ora la forma quadratica $x'Ax$ dove A è simmetrica. Si può dimostrare facilmente che

$$\frac{\partial x'Ax}{\partial x} = 2Ax. \tag{A.8}$$

Di seguito dimostriamo la (A.8) nel caso in cui A è simmetrica ed ha dimensione 3×3. L'illustrazione che segue può essere generalizzata al caso di n dimensioni.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}.$$

Tenendo presente che $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ e $a_{23} = a_{32}$, $x'Ax$ può essere riscritto come:

$$x'Ax = x_1^2 a_{11} + 2x_1x_2a_{12} + 2x_1x_3a_{13} + x_2^2a_{22} + 2x_2x_3a_{23} + x_3^2a_{33}.$$

Le derivate parziali possono essere scritte come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'Ax}{\partial x_1} &= 2x_1a_{11} + 2x_2a_{12} + 2x_3a_{13} = 2a_1'x; \\ \frac{\partial x'Ax}{\partial x_2} &= 2x_1a_{12} + 2x_2a_{22} + 2x_3a_{23} = 2a_2'x; \\ \frac{\partial x'Ax}{\partial x_3} &= 2x_1a_{13} + 2x_2a_{23} + 2x_3a_{33} = 2a_3'x. \end{aligned}$$

Il gradiente, quindi, è pari a:

$$\frac{\partial x'Ax}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'Ax}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x'Ax}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x'Ax}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1'x \\ a_2'x \\ a_3'x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} x = 2Ax. \tag{A.9}$$

A.12 Il lemma di inversione della matrice e le sue applicazioni nella regressione

Sia A una matrice quadrata di ordine $k \times k$ e siano U e V matrici di dimensione $k \times m$. È agevole verificare che

$$(A - UV')^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(I_m - V'A^{-1}U)^{-1}V'A^{-1}, \tag{A.10}$$